

DIE WELT IST ABZÄHLBAR

Es wird eine abzählbare Anordnung alles Denkbaren gegeben (Universalanordnung). Jedem Denkobjekt wird mindestens eine natürliche Zahl eindeutig zugeordnet. Im weiteren wird gezeigt, warum jeder Beweis einer Überabzählbarkeit (insbesondere Cantor) bei dieser Anordnung versagt.

Der Begriff abzählbar wird hierbei im Sinne der Mathematik verwendet, d.h. er bezeichnet die Mächtigkeit einer Menge, nicht größer als die der natürlichen Zahlen.

Diskussionswürdig ist zunächst der Begriff Welt, ein ausgesprochen unscharfer Begriff. (Gibt es absolut scharfe Begriffe?) Ich möchte den Begriff Welt hier im Sinne des folgenden Satzes verstehen, der natürlich auch definitivischen Charakter hat:

Satz: DIE WELT IST ALLES, WORÜBER GESPROCHEN WERDEN KANN.

Aber nicht nur hic et nunc. Die Möglichkeit, im Sinne dieses Satzes über etwas sprechen zu können, soll für alle denkenden Subjekte und in jedem möglichen Zeitpunkt gelten.

Diese Erläuterung des Begriffes "worüber gesprochen werden kann" ist deshalb notwendig, weil durchaus denkbar ist, daß irgendwo, z.B. irgendwo im Andromedanebel, irgendeinmal irgendeine Ausdrucksform (Sprache) existiert (existiert hat, existieren wird), über die wir hic et nunc nichts sagen können.

Eine Möglichkeit, die Definition der Welt im Sinne des obigen Satzes auf mich als Autor und auf den Leser dieser Zeilen zu beschränken, wäre natürlich dann gegeben, wenn jede ~~an~~ irgend-einem Ort und zu irgendeinem Zeitpunkt verwendete Sprache in die in diesem Aufsatz verwendete Sprache übersetzt werden könnte und dabei auch das Verständnis für das jeweils Ausgesprochene, z.B. durch entsprechende Erläuterungen, erzielbar wäre. Gerade diese letzte Voraussetzung ist jedoch problematisch. Auch eine noch so gute Übersetzung und eine noch so

ausführliche Erläuterung wäre wahrscheinlich außerstande, einem Neandertaler oder einem Javamenschen Sätze über "Superstrings" verständlich zu machen.

Ein Beweis des obigen Satzes erübrigt sich natürlich dann, wenn wir ihn als reine Definition verstehen. In diesem Fall ist es aber notwendig zu fragen, ob diese Definition auch sinnvoll ist.

Zunächst einmal: Ist die Welt kleiner als alles, worüber gesprochen werden kann? Anders ausgedrückt. Ist es sinnvoll alles, worüber gesprochen werden kann, der Welt zuzuordnen? Da alles, worüber gesprochen werden kann ein mögliches Denkobjekt ist, will ich diese Frage bejahen.

Als zweites ist zu fragen, ob es etwas in der Welt gibt, über das nicht gesprochen werden kann. Der Beweis oder besser die Begründung, daß dies nicht der Fall ist, soll indirekt gegeben werden. Behauptet nämlich irgendjemand in irgendeinem Zeitpunkt das Gegenteil, dann bedeutet dies nichts anderes als die Behauptung, es gäbe "etwas" in der Welt, worüber nicht gesprochen werden kann. Damit ist aber diese Behauptung selbst bereits ein Sprechen über dieses "etwas". Sie enthält also einen Widerspruch in sich. Daraus folgt die Vollständigkeit des Begriffes "Welt" aus dem obigen Satz.

Wir kommen nun zur Verbindung der Begriffe "Welt" und "abzählbar". Diese Verbindung stellen wir dadurch her, daß wir zeigen, alles, worüber (von irgendjemandem irgendeinmal) gesprochen werden kann, kann abzählbar angeordnet werden. Haben wir dies gezeigt, dann haben wir die Welt, so wie wir sie im obigen Satz definiert haben, abzählbar angeordnet.

Zunächst zeigen wir, daß alle möglichen sprechenden Subjekte abzählbar angeordnet werden können. Dabei gehen wir von der Tatsache aus, daß sprechende Subjekte eine gewisse Ausdehnung in Raum und Zeit haben müssen. Die Möglichkeit "über etwas sprechen zu können" setzt daher ein Subjekt dieses Sprechens voraus, das durch ein bestimmtes Element räumlicher und zeit-

licher Ausdehnung eindeutig definiert werden kann.

Alle solchen möglichen "Raum-Zeitelemente" (RZE) abzählbar anzuordnen ist aber leicht. Man bildet etwa elementare Raum-Zeitelemente als vierdimensionale Volumina bestehend aus einem Würfel der Seitenlänge der Elementarlänge und der Dauer der Elementarzeit. Man kann nun hinsichtlich der Zeitachse vom Urknall angefangen die Elementarzeitintervalle zählen, hinsichtlich der Volumina ein Koordinatensystem z.B. im Erdmittelpunkt beginnend einführen und in diesen die möglichen Elementarwürfel, also Würfel von der Kantenlänge der Elementarlänge, durchnummerieren.

Durch die Kombination der abzählbaren Elementarzeitintervalle mit den abzählbaren Elementarwürfeln läßt sich eine abzählbare Anordnung der RZE bilden. Da jedes mögliche sprechende Subjekt infolge seiner räumlichen Ausdehnung in jedem möglichen Zeitraum (!) des Sprechens mindestens ein RZE enthält, welches das Subjekt und das Sprechen eindeutig kennzeichnet, kann die Menge alles möglichen Sprechens jedes möglichen Subjektes abzählbar angeordnet werden.

Nun ist noch zu zeigen, daß alles, vom dem ein bestimmtes Subjekt in einem bestimmten Zeitpunkt sprechen kann, abzählbar angeordnet werden kann. Um dies zu zeigen definieren wir sogenannte "Bildschirmmitteilungen" (BSM). Darunter verstehen wir quadratische, graphische Darstellungen, bestehend aus schwarzen und weißen Elementarquadraten. Ein solches Elementarquadrat ist ein Quadrat mit der Seitenlänge der Elementarlänge, das entweder weiß oder schwarz ist.

Inwieweit eine Farbgebung bei solchen Elementarquadraten physikalisch möglich ist, soll hier nicht interessieren.

Wesentlich ist, daß alles, was schriftlich mitgeteilt werden kann, also z.B. auch alles, was auf einem schwarz-weiß-Bildschirm eines Fernsehmonitors gezeigt werden kann, durch solche BSM dargestellt werden kann.

Wir wollen nun zeigen, wie durch solche BSM über Teile der

Welt gesprochen werden kann:

Offenbar kann alles, was auf einem Bildschirm darstellbar ist, in Form einer BSM dargestellt werden. Mithin enthält die Menge der BSM z.B. alles, was von Menschen je geschrieben wurde, aber auch alles, was von ihnen je geschrieben wird, ja auch nur je geschrieben werden könnte. Darüber hinaus enthält die Menge der BSM auch Mitteilungen, z.B. Texte, die so lang sind, daß sie allein deshalb nicht geschrieben werden können weil die zur Verfügung stehende Zeit jedes Lebewesens, vielleicht sogar der ganzen existierenden Welt, nicht dazu ausreicht, diese Mitteilung als Ganzes zu erfassen.

Die Menge der BSM enthält aber auch Mitteilungen über ansonsten Unbeschreibbares. So z.B. wird es niemals durch eine Mitteilung möglich sein, ein Gefühl einem anderen Subjekt vollständig mitzuteilen. Wohl aber kann über dieses Gefühl eindeutig gesprochen werden, wenn die Art des Gefühls, der Zeitpunkt und das Subjekt des Gefühls genannt werden. So läßt sich etwa über den Schmerz sprechen, den Cäsar empfand, als ihn der erste Stich der Verschwörer getroffen hat.

Hier führt eine Abzweigung zur Frage der "Existenz". Dazu ein Beispiel: Kommt Gott in dieser Welt vor? Diese Frage kann etwa so beantwortet werden: Gab es je oder wird es je einen Menschen geben der einmal an Gott gedacht hat - und zwar nicht an einen Gott sondern eben an "Gott" -, dann kommt Gott in der hier genannten Welt vor. Besagter Mensch hätte nämlich in gesagtem Zeitpunkt an Gott denken können und damit über Gott sprechen können, so daß es eine Gott entsprechende Kombination von RZE und BSM gibt.

Anmerkung:

Man sieht leicht, daß diese Beschränkung auf Bildschirmmitteilungen der Universalität der Abzählbarkeit der Welt keinen Abbruch tut. Mitteilungen werden nun einmal von einem Subjekt zu einem anderen über Medien übertragen, über Materie, Schwingungen, Strahlungen usw., und alle diese Medien sind gequantelt und nur darauf kommt es bei der Abzählbarkeit an.

Wir haben also die Kombination von Raum-Zeitelerenten und Bildschirmmitteilungen abzählbar angeordnet. Diese Anordnung bezeichnen wir als Universalanordnung (UA).

Wo ist nun der Platz irgendeines Teiles der Welt oder auch der Welt als Ganzes, denn auch über die Welt als Ganzes kann man sprechen, in der Universalanordnung? Hierzu ein Beispiel: Die folgende BSM bezeichnet für mich im Zeitpunkt der Niederschrift dieses Textes die Zahl 8:

8

Die Zahl 8 kann für mich aber auch folgendermaßen dargestellt werden:

$$2^3; 2+2+4; \sqrt{64}; e^{\ln 8}; \sum_{r=1}^{\infty} 2^{3-r}; \text{eight}; \text{Acht};$$

usw. Das Wort "Acht" kann aber auch im Sinne des Wortes Acht "in Acht und Bann" verstanden werden. Der Sinn einer BSM ist daher relativ (zum Leser und zum Zeitpunkt des Lesens).

Deshalb muß grundsätzlich jede BSM stets mit einem RZE gekoppelt werden. Im bisher üblichen Sprachgebrauch ist ein solches RZE eben teils durch den Autor, teils durch den Leser bestimmt.

Aus der Abzählbarkeit der RZE und der Abzählbarkeit der BSM folgt die Abzählbarkeit der Welt (entsprechend der obigen Definition). Nun sind zweifellos die reellen Zahlen ein Teil der Welt. Wie erklärt sich aber der Widerspruch zwischen der abzählbaren Anordnung der Welt und der Überabzählbarkeit der reellen Zahlen?

Hier muß folgende Überlegung angestellt werden: Eine abzählbare Anordnung von Elementen einer Menge bedeutet eine eindeutige Zuordnung der Elemente dieser Menge zu den natürlichen Zahlen. Die unendliche Menge der natürlichen Zahlen wird von uns gefühlsmäßig sehr ähnlich behandelt wie eine endliche Menge von Zahlen. Die Menge der natürlichen Zahlen ist uns jedoch nur durch ihr Bildungsgesetz, nämlich, daß jede natürliche Zahl n einen Nachfolger $n+1$ in der Menge hat, erfaßbar. In den üblichen Beweisen der Überabzählbar-

kheit von Mengen wird dies vernachlässigt. Wir wollen dies am Beispiel des Cantor'schen Beweises der Überabzählbarkeit der Menge der reellen Zahlen zeigen:

Cantor geht davon aus, daß bei einer abzählbaren Anordnung der reellen Zahlen zwischen 0 und 1 es stets möglich sein muß, jede einzelne reelle Zahl in Form einer unendlichen Dezimalzahl $0, a_1, a_2$ usw. anzugeben. Cantor betrachtet nun die Zahlen a_{ij} , die j -te Dezimalstelle der reellen Zahl aus der i -ten Zeile, und konstruiert eine neue Dezimalzahl $0, b_1, b_2$ usw., für die lediglich gefordert wird, daß b_j ungleich a_{jj} für alle j ist. Offenbar handelt es sich bei dieser Dezimalzahl $0, b_1, b_2 \dots$ um eine reelle Zahl zwischen 0 und 1, die von jeder Dezimalzahl der Anordnung $0, a_{11}, a_{12} \dots$ verschieden ist.

Das Entscheidende der Cantor'schen Beweisführung liegt darin, daß diese abzählbare Anordnung als fertiggegeben vorgestellt wird. Wie immer die Bildungsgesetze dieser Anordnung auch sein mögen, sie werden als vollständig angenommen, d.h. weitere Bildungsgesetze sind nicht mehr zulässig. Die Konstruktion einer Cantor'schen Diagonalszahl ist aber gerade ein Bildungsgesetz, das offenbar in den für die ursprüngliche Anordnung herangezogenen Bildungsgesetzen nicht enthalten war.

Man kann das auch folgendermaßen ausdrücken: Wann immer man auf Grund einer vorgegebenen Menge von Bildungsgesetzen eine Anordnung der reellen Zahlen zwischen 0 und 1 vornimmt, ist es stets möglich, durch das Bildungsgesetz der Cantor'schen Diagonalszahl eine in der Anordnung bisher nicht enthaltene reelle Zahl hinzuzufügen. Ich sehe hier eine Ähnlichkeit mit der Möglichkeit, bei natürlichen Zahlen zu jeder natürlichen Zahl n eine größere Zahl $n+1$ zu finden.

Der Unvollständigkeitsbeweis mit Hilfe der Cantor'schen Diagonalszahl ist nur dadurch möglich geworden, daß ein neues Konstruktionsprinzip für reelle Zahlen, nämlich das Bildungsgesetz der Cantor'schen Diagonalszahl, hinzu-

gefügt wurde. Gelänge es, alle möglichen Konstruktionsprinzipien ebenfalls abzählbar anzuordnen, dann wäre der Cantor'sche Gegenbeweis nicht mehr möglich.

Genau dies geschieht nun durch die Universalanordnung. Ein Konstruktionsprinzip ist zweifellos etwas, worüber gesprochen werden kann, ja, worüber gesprochen werden muß, um es anzuwenden. Es kann daher in Form einer BSM angeschrieben werden. Insbesondere gilt dies natürlich für das Cantor'sche Diagonalverfahren. Der Widerspruch zwischen der abzählbaren Anordnung im Rahmen der Universalanordnung und dem Gegenbeweis von Cantor klärt sich nun folgendermaßen:

Wird von irgend jemand (etwa vom Leser dieser Zeilen) in irgendeinem Zeitpunkt (etwa im Zeitpunkt des Lesens) bestritten, daß in der Universalanordnung für jede reelle Zahl ein Platz vorhanden wäre, dann wird durch die Person und durch den Zeitpunkt des Einwandes ein RZE definiert. Der Einwand selbst kann in Form einer BSM formuliert werden, etwa eine BSM, welche die Konstruktion einer Cantor'schen Diagonalszahl auf Grund der Universalanordnung zum Inhalt hat. Für die Kombination (RZE, BSM) ist aber ein Platz in der Universalanordnung vorhanden. Entspricht dieser Platz etwa der i -ten Zeile in der Anordnung der für reelle Zahlen vorhandenen Plätze, dann enthält das vom Kritiker aufgestellte Konstruktionsprinzip der Diagonalszahl die Forderung, die i -te Dezimalzahl b_i muß ungleich der i -ten Dezimalzahl der Diagonalszahl gewählt werden. Dies ist ein Widerspruch. Der Widerspruch beruht darauf, daß in der Universalanordnung eben auch alle denkbaren Konstruktionsprinzipien berücksichtigt sind, daher auch das Konstruktionsprinzip der Cantor'schen Diagonalszahl, angewendet auf eine beliebige Anordnung, also auch auf die Universalanordnung.

Die Universalanordnung nimmt keine Rücksicht auf Sinn oder Inhalt oder gar Wahrheit von Bildschirmmitteilungen. Wie weit eine Bildschirmmitteilung als sinnvolle Aussage oder als wahre Aussage angesehen wird, ist ausschließlich dem jeweiligen Denksubjekt überlassen, das durch das RZE gekennzeichnet wird.

Man sieht übrigens leicht, daß es nicht notwendig ist als UA die Kombinationen (RZE, BSM) zu betrachten, sondern daß die Menge aller BSM, allein genügt. Dazu ist es nämlich nur notwendig, überall dort, wo eine BSM mit einem RZE zusammen betrachtet wird, eine verbale Beschreibung dieses RZE an die BSM anzufügen. Es genügt also als UA alle jene BSM zu betrachten, in denen durch eine Anfügung ein mögliches sprechendes Denksubjekt, also ein RZE, beschrieben wird!

In gleicher Weise lassen sich Widersprüche in allen Beweisen der Überabzählbarkeit einer Menge zeigen, in denen ein Element definiert wird (über ein Element gesprochen wird, ein Element durch eine BSM beschrieben wird), für welches in der UA angeblich kein Platz reserviert ist.

Die hier verwendeten Gedanken finden sich schon bei Wittgenstein ("Die Welt ist alles, was der Fall ist", und "Worüber man nicht sprechen kann, darüber soll man schweigen") und bei Gödel (abzählbare Anordnung).